المحاضرة التاسعة -9-    2018/5/7 م

مثال:

من خلال فحص 100 شخص 36 منهم يعانون مضاعفات بعد الحقنة والمطلوب:

إيجاد مجال الثقة للنسبة الذين يعانون من مضاعفات وذلك على مستوى المعنوية

α معلومة:    $\alpha = 0,05$ , $Z_{0,975} = 1,96$

الحل:

نعتبر عينة محدودة، العينة معروفة، في حالة النسبة

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

نحصر هذه الكمية بين كميتين محدودتين.

نكمل نفس عبارة المحاضرات السابقة

⇐ وبالتالي مجال الثقة هو

$$\left[ \hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$\left[ 0,36 - (1,96) \sqrt{\frac{(0,36)(0,64)}{100}} \text{ ; } 0,36 + (1,96) \sqrt{\frac{(0,36)(0,64)}{100}} \right]$$

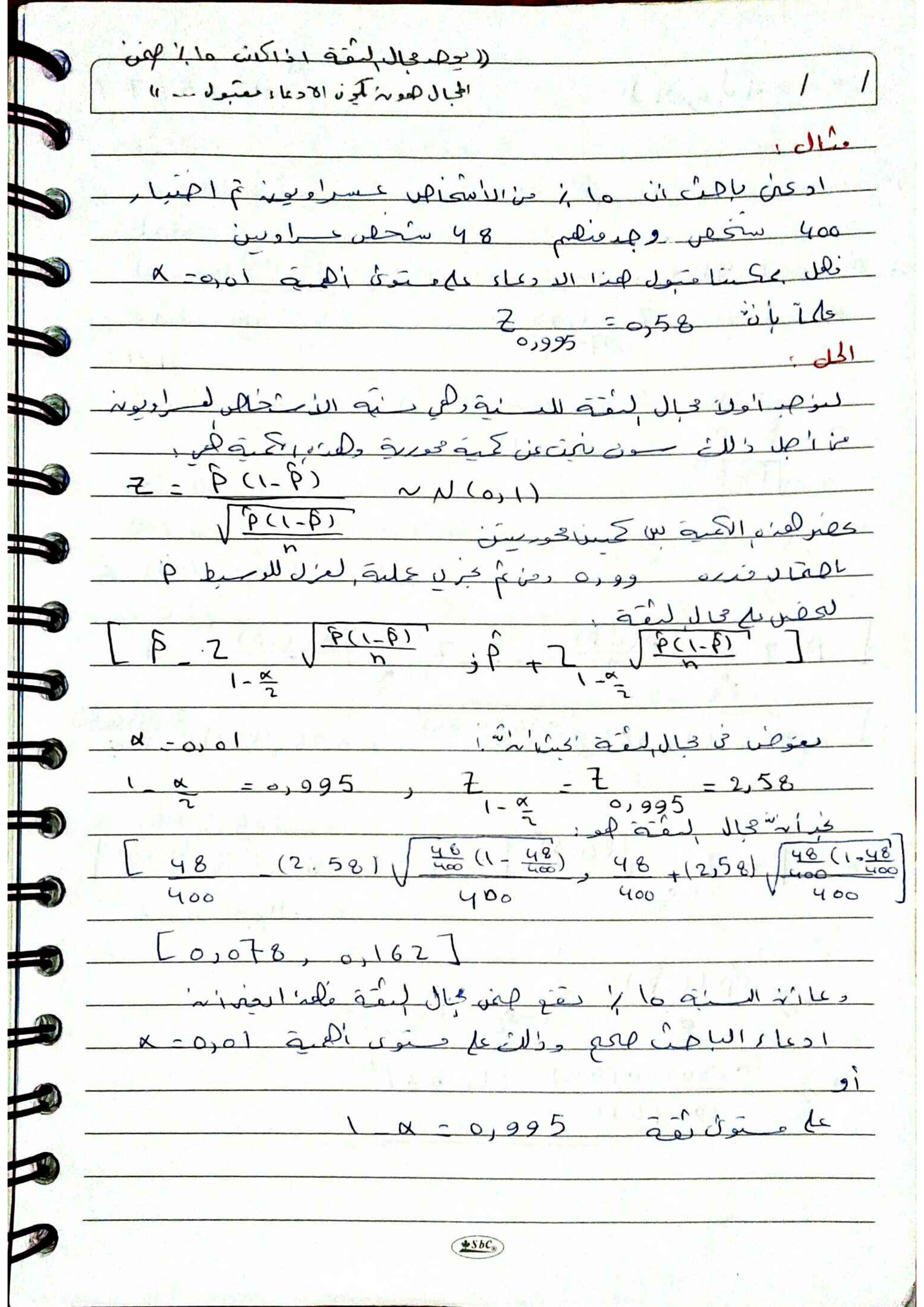
أما الخطأ المطلوب:

$$e = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right| = \left| \mp 1,96 \sqrt{\frac{(0,36)(0,64)}{100}} \right|$$

حساب حجم العينة:

$$n \geq \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{(0,36)(0,64)}{(0,75)^2} (1,96)^2$$



«يوضح مجال الثقة اذا كانت ١٠٪ ضمن المجال فهنا يكون الادعاء مقبول --»  / /

**مثال:**

ادعى باحث ان ١٠٪ من الاشخاص عسراويين تم اختيار 400 شخص ووجد منهم 48 شخص عسراويين فهل يمكننا قبول هذا الادعاء على مستوى اهمية $\alpha = 0,01$

علماً بأن $Z_{0,995} = 2,58$

**الحل:**

نوجد اولاً مجال الثقة للنسبة وهي نسبة الاشخاص العسراويين من اجل ذلك سوف نبحث عن كمية محورية وهي الكمية:

$$Z = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

نحصر هذه الكمية بين كميتين محوريتين من الجدول نحدده وبعدها نقوم بإجراء عملية لعزل الوسيط $p$ لنحصل على مجال الثقة:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \, , \, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

نعوض في مجال الثقة كما يلي: $\alpha = 0,01$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ , $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,995} = 2,58$

يكون مجال الثقة هو:

$$\left[\frac{48}{400} - (2,58)\sqrt{\frac{\frac{48}{400}(1-\frac{48}{400})}{400}} \, , \, \frac{48}{400} + (2,58)\sqrt{\frac{\frac{48}{400}(1-\frac{48}{400})}{400}}\right]$$

$$[0,078 \, , \, 0,162]$$

وبما أن النسبة ١٠٪ تقع ضمن مجال الثقة فهذا يعني أن ادعاء الباحث صحيح وذلك على مستوى اهمية $\alpha = 0,01$

أو

على مستوى ثقة $1 - \alpha = 0,995$

/ /

# * إيجاد مجال الثقة للتباين في مجتمع إحصائي طبيعي :

نفرض لدينا مجتمعاً "إحصائياً طبيعياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

حيث $\mu$ و $\sigma^2$ مجهولين ،

ولنأخذ عينة عشوائية حجمها $n$ عنصراً ، وسطها الحسابي $\bar{X}$

وتباين العينة $S$ والانحراف المعياري $S^2$

والمطلوب :

عين مجال الثقة للوسط $\sigma^2$ مع مستوى المعنوية $\alpha$ معلومة .

**الحل النظري :**

من أجل إيجاد مجال الثقة للوسط $\sigma^2$ سوف نبحث عن كمية محورية ولتكن الكمية هي :

$$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ومن ثم نحصر هذه الكمية بين كميتين محددتين من جدول توزيع الكمية المحورية

$$P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1-\alpha$$

حيث :

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{b} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{a}\right) = 1-\alpha \qquad a = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = 1-\alpha \qquad b = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1-\alpha \qquad a < b$$

وهكذا نكون حصرنا $\sigma^2$ بين إحصائيتين

وبالتالي مجال الثقة يعطى بالشكل :

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

**مثال:**

أخذت عينة من 20 شخصاً وقيست أوزانهم فوجد أن الانحراف المعياري هو 9 فإذا علمت أن للأوزان التوزيع الطبيعي

عندئذ:

أوجد مجال ثقة للتباين على مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ علماً أنه

$$\chi^2_{0,025}(19) = 8,90$$

$$\chi^2_{0,975}(19) = 38.58$$

**الحل:**

من أجل إيجاد مجال الثقة لـ $\sigma^2$ نبحث عن كمية محورية وهذه الكمية هي:

$$W = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

نحصل هذه الكمية من كميتين محوريتين.

وبالتالي مجال الثقة هو:

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} , \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] = \left[ \frac{(19)(81)}{3,58} , \frac{(19)(81)}{8,90} \right]$$

**ملاحظة:**

لدينا

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

العينة من أجل الفرضيات الصغيرة

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - M_0)^2$$

$$\frac{n s^2}{\sigma^2} = \sum_{1}^{n} \left( \frac{x_i - M_0}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

/ /

## اختبار الفرضيات الاحصائية.

نفرض لدينا مجتمعا احصائيا موصوف بتوزيع احتمالي ويتعلق بمجهول $\theta$

- ولنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية بحجم $n$ عندئذ بالتعريف،

- الفرضية الاحصائية هي ادعاء او مقولة حول وسيط المجتمع الاحصائي.

- وقد يكون هذا الادعاء صحيح وقد يكون خاطئ

- وعادة يوجد لدينا نوعان من الفرضيات الاحصائية.

النوع الاول:

الفرضية الاحصائية الابتدائية وعادة يرمز لها بالرمز $H_0$

حيث $(\theta = \theta_0)$

ومقابل هذه الفرضية يوجد فرضية بديلة سوف نرمز بالرمز $H_1$ وهي ثلاثة أشكال، وكل شكل هو مقابل الاولى.

$H_1: \theta \neq \theta_0$ (فرضية بديلة ذات جانبين)

$H_1: \theta > \theta_0$ (فرضية بديلة ذات جانب أيمن او أعلى)

$H_1: \theta < \theta_0$ (فرضية بديلة ذات جانب أيسر او أدنى)

ملاحظة:

عند اختبار أي فرضية $H_0$ مقابل $H_1$ وذلك عند مستوى دلالة او اهمية $\alpha$ معلومة.

يوجد لدينا منطقتين منطقة رفض ونرمز لها بالرمز $W_c$

منطقة قبول ونرمز لها بالرمز $\overline{W_c}$

/ /

حيث Ω هي المستوى الأوسع

عندئذٍ:

$$w_0 \cap \bar{w}_0 = \phi$$
$$w_0 \cup \bar{w}_0 = \Omega$$

ملاحظة:

عند اختبار أي فرضية إحصائية $H_0$ مقابل $H_1$ سوف نتعرض إلى أخطاء وهذه الأخطاء نوعان:
خطأ من النوع الأول، وخطأ من النوع الثاني،
ولفهم ذلك ننظر إلى الجدول التالي:

| | رفض | قبول |
|---|---|---|
| $H_0$ صحيحة | خطأ من النوع الأول | قرار صحيح |
| $H_0$ خاطئة | قرار صحيح | خطأ من النوع الثاني. |

ملاحظة:

عند اختبار فرضية إحصائية $H_0$ مقابل $H_1$ قلنا إننا سوف نتعرض إلى أخطاء وهي من النوع الأول أو النوع الثاني
لكن احتمال حدث الوقوع بخطأ من النوع الأول والذي نرمز له بالرمز $\alpha$
والذي يمثل حجم الاختبار أو مستوى دلالة الاختبار والذي يعرف بالشكل

$$\alpha = P(X \in w_0 / H_1)$$

منطقة الرفض

أما احتمال حدث الوقوع بخطأ من النوع الثاني والذي نرمز له بالرمز $\beta$
والذي يعطى بالشكل $\beta = P(X \in \bar{w}_0 / H_1)$
إذ $X$ تدعى نقطة العينة وقد تكون $X = (X_1, X_2)$
أما الكمية $1-\beta = 1 - P(X \in \bar{w}_0 / H_1)$
تدعى بقوة اختبار الفرضية $H_0$

/ /

علماً أن $W_0$ معلومة وبالتالي $\bar{W_0}$ سوف نعلم أي اذا علمت منطقة الرفض لاختبار فرضية العدم $H_0$ مقابل فرضية بديلة $H_1$ سوف نعلم منطقة القبول

وبالتالي علينا أن نعلم " $\alpha, \beta, 1-\beta$ "

**مثال:**

نفرض لدينا مجتمع احصائي طبيعي $X \sim N(\mu, 100)$

ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها $n = 25$ واذا كانت

منطقة الرفض للفرضية

$H_0: \mu = 75 = \mu_0$

$H_1: \mu = 78 = \mu_1$

هي $W_0 \{ \bar{X} \geq 75 \}$ , المطلوب:

1- عين كلاً من " $\alpha, \beta, 1-\beta$ "

$F_z = 0,5$ , $F_z(1,5) =$

**الحل:**

$$\alpha = P\{ X \in W_0 / H_0 \}$$

$$= P\{ \bar{X} \geq 75 / H_0 \} = P\left\{ \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} / H_0 \right\}$$

$$= P\left\{ \underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq \frac{75-75}{10/5} \right\} = P\{ Z \geq 0 \}$$

$$= F_z(0) = 0,5 \Rightarrow \alpha = 0,5$$ أي أن

• إيجاد $\beta$.

$$\beta = P\{ X \in \bar{W_0} / H_1 \}$$

$$= P\{ \bar{X} < 75 / H_1 \}$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} / H_1 \right\}$$

/ /

$= P\{Z_{\sim N(0,1)} < \frac{75-78}{1{,}5}\}$

$= P(Z < -\frac{3}{2}) = P\{Z < -1{,}5\}$

$= F(-1{,}5) = 1 - F(1{,}5) = 1 - 0{,}9332$

$\Rightarrow \beta = 1 - 0{,}9332$

وبالتالي فإن:

$1 - \beta = 1 - (1 - 0{,}9332)$

$1 - \beta = 0{,}9332$

انتهت المحاضرة التاسعة ..

نقلاً من [illegible]

BANAN ♡